来自实体书

第一章自然数

数学归纳法是一种证明无穷序列都正确的方法

假设 a)通过数学论证了如果 r 是正整数且命题 A_r 为真，则可推出命题 A_{r+1} 也为真；b)第一个命题 A_1 已知为真，那么所有命题必然都是真的。

习题 用数学归纳法证明 $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$

解：假设 $n=r$ 时有 $(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^r})=\frac{1-q^{2^{r+1}}}{1-q}$ 成立，那么 $n=r+1$ 有

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^r})(1+q^{2^{r+1}})$$

$$=\frac{1-q^{2^{r+1}}}{1-q}\cdot(1+q^{2^{r+1}})$$

$$=\frac{1-q^{2^{r+1}}+q^{2^{r+1}}-q^{2^{r+1}}\cdot q^{2^{r+1}}}{1-q}$$

$$=\frac{1-q^{2^{(r+1)+1}}}{1-q}=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$$

仍成立，且 $n=1$ 时 $(1+q)(1+q^2)=\frac{1-q^4}{1-q}$ 成立，所以得证。

证明素数有无穷多个

证：假设素数有限多个，即 $P_1,P_2\cdots P_n$ 共 n 个，那么可以构造一个新数 $A=P_1P_2\cdots P_n+1$，A是所有素数相乘加1，显然A不能被任意一个素数整除(都余1)，这与假设矛盾。

以上是反证法，但也可以通过上述方法制造出无穷多个素数

素数定理是描述素数的分布的定理，内容为：令 A_n 为整数1,2,3,…n中素数的个数，那么 $\frac{A_n}{n}$ 渐近等于 $\frac{1}{\ln n}$，即 $\frac{A_n/n}{1/\ln n}$ 趋于1，只要

n取的足够大，$\frac{A_n/n}{1/\ln n}$与1的差要多小就能有多小。

尚未能证明的哥德巴赫猜想：任何偶数都能被表示为2个素数之和。

PS：上面说到的素数定理和哥德巴赫猜想很有趣，因为素数本身是用乘法定义的，它的分布却和对数运算有关，它也和加法有紧密的联系 ;)

习题：一个数Z可以被3整除，只须它的数码之和$S=a_0+a_1+\cdots+a_n$能被3整除。

证明：$Z=a_0+a_1\cdot 10+a_2\cdot 10^2+\cdots+a_n\cdot 10^n$

$S=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

$Z-S=a_1(10-1)+a_2(10^2-1)+\cdots+a_n(10^n-1)$

$\because 10\equiv 1 \pmod 3$ 即10和1模3同余

$\therefore 10^n\equiv 1 \pmod 3$

$\therefore a_1(10-1)+a_2(10^2-1)+\cdots+a_n(10^n-1) \pmod 3 = 0$

$\therefore Z$与S模3同余

$\therefore$只要S可以被3整除，那么Z就可以被3整除。

费马定理：如果P是任意一个不能整除整数a的素数，则 $a^{P-1}\equiv 1 \pmod P$

如 $10^2\equiv 1 \pmod 3$，$2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$

证明：令 $m_1=a, m_2=2a \cdots m_{p-1}=(p-1)a$

那么 $m_1, m_2 \cdots m_{p-1}$ 模 p 必没有同余的，假设存在 m_r, m_s 模 p 同余，有 $1\le r<s\le p-1$，有 $m_s-m_r=(s-r)a$，$s-r<p$，因此 p 不是 $s-r$ 的因子，同时 p 也不是 a 的因子，产生矛盾

所以 $m_1, m_2 \cdots m_{p-1}$ 模 p 的余数集合是 $1, 2 \cdots, p-1$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots m_{p-1} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)a^{p-1}$$
$$\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1) \pmod p$$

$$\therefore 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)(a^{p-1}-1)\equiv 0 \pmod p$$

$$\therefore a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

费马大定理：对于任意 $n>2$，方程 $a^n+b^n=c^n$ 在自然数中是不可解的.

这个定理对于 $n<619$ 已经被证明，但不是对所有 n.

第二章数学中的数系

证明 x 是无理数，$x^2=1+1=2$.

证明：假设 x 是有理数. $x=\frac{p}{q}$，不失一般性，令 p 与 q 无公因子，则有 $p^2=2q^2$

由上式知 p^2 是偶数，p 必是偶数，令 $p=2r$，有：

$$4r^2=2q^2 \Longrightarrow 2r^2=q^2$$

则 q 也是偶数，此与前提 p 与 q 无公因子矛盾. 因此 x 是无理数

有理数的小数表示，要么是有限小数，要么是无限循环小数（证明可以通过除法余数的规律），反之无限循环

小数都是有理数（无穷级数求和）

集合的可数性：一个集合，如果其序列能够像整数那样排成一个序列，就称这个集合是可数的（不意味着集合中的元素是有限的）

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3 & \cdots & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ r_1, & r_2, & r_3 & \cdots & r_n \end{array}$$

可证明以下结论(Page 93)

所有有理数的集合是可数的

全体实数集是不可数的

康托引入等势的概念，即二个集合中的元素能一一对应即为两个集合等势，如全体整数与全体偶数等式，因为

$1, 2, 3, 4 \cdots\cdots n.$

$2, 4, 6, 8 \cdots\cdots 2n.$

但并不是所有的无限集合都等势，因为至少如前面讨论的包括两类如整数的可数无限和如连续统的不可数无限。如果集A和集B的某个子集等势，而B不等势于A或它的任意子集，则称集B比集A有一个更大的基数。

棣莫弗公式说明在复数域中，1恰有n个不同的n次方根，它们可以用圆内接正n边形的顶点来表示。

代数基本定理：每一个带有实或复系数的任意n次代

数方程：

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

在复数域内有解.

第三章几何作图数域的代数

上一章提到高斯证明了一般n次代数方程有根，这里说明不可能利用根式的方法解一般n次代数方程

第3.2节讨论了尺规作图可以表示的数和数域的概念.有了数域的概念，可以很容易证明一些不可尺规作图的问题的不可解性.

Page140 可以作图圆的正2^n边形，可求每条边的边长当n很大时，可以认为正2^n边形的周长趋于圆的周长，可以得到π的极限公式：

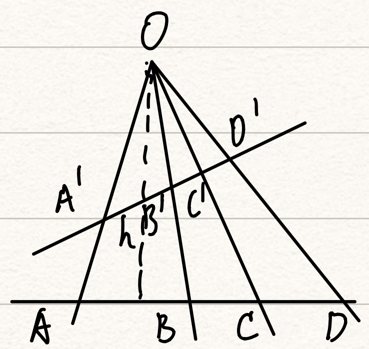
$$2^{n-1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n-1\text{个根号}}\to\pi \quad 当 n\to\infty$$

第四章射影几何公理体系非欧几里得几何

如果在一条直线上我们有四个点A,B,C,D，并把它们射影到另一条直线上A',B',C',D'，则这时四个点的交比 $\frac{CA}{CB}/\frac{DA}{DB}=\frac{C'A'}{C'B'}/\frac{D'A'}{D'B'}$ 在射影下是不变的.

证明

证明



$\triangle OAC$的面积 $= \frac{1}{2} h \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin\angle AOC$

$\triangle OBC$的面积 $= \frac{1}{2} h \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin\angle BOC$.

$\triangle OAD$的面积 $= \frac{1}{2} h DA = \frac{1}{2} OA \cdot OD \sin\angle AOD$

$\triangle OBD$的面积 $= \frac{1}{2} h \cdot DB = \frac{1}{2} OB \cdot OD \cdot \sin\angle BOD$

$$\therefore \frac{CA}{CB} \Big/ \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}$$

$$= \frac{\cancel{OA} \cdot \cancel{OC} \cdot \sin\angle AOC}{\cancel{OB} \cdot \cancel{OC} \cdot \sin\angle BOC} \cdot \frac{\cancel{OB} \cdot \cancel{OD} \cdot \sin\angle BOD}{\cancel{OA} \cdot \cancel{OD} \cdot \sin\angle AOD}$$

$$= \frac{\sin\angle AOC \cdot \sin\angle BOD}{\sin\angle BOC \cdot \sin\angle AOD}$$

$\because \angle AOC = \angle A'OC'$; $\angle BOD = \angle B'OD'$ ...

$$\therefore \frac{CA}{CB} \Big/ \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} \Big/ \frac{D'A'}{D'B'}$$

无穷点的引入是为了避免讨论几何问题时把两条直线是相交还是平行分两种情况讨论，当两条直线平行时，认为其相交于无穷远点，，且只通无穷远点不通过普通点的直线叫做无穷远直线

引入无穷远元素不仅使射影定理的叙述更简单(不再需要对相交和平行分情况讨论)，而且也常常使它的证明比较简单，一般原理是这样的，对几何图形F，我们把射影变换成F的全体图形称为F的“射影类”，因为根据定义射影性质是在射影下不变的，因此F的射影性质将和它“射影类”中的任意图形的射影性质相同，反之亦然。因此为了证明关于F的这种定理，只需对F的“射影类”中的任意图形来证明就可以了，一般可以选一个较为特殊的便于证明的即可(评：好一招移花接木)，平面上的笛沙格定理的证明就是一个例子.

人们对解析几何认识的几个阶段

1) 希望用纯几何的思路解决几何问题

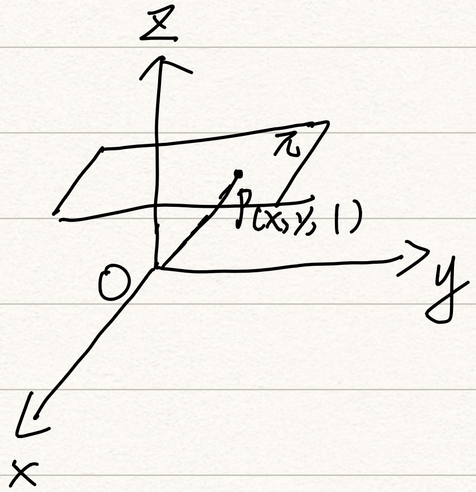
⇓

2) 从几何出发，把它翻译数的语言（几何为本，代数为用）

⇓

3) 从数出发，称数对为点，用几何的解释或具体化代数（代数为本）

齐次坐标：既包括普通点又包括理想点的坐标体系，把给定的X，Y平面升维到x，y，z的三维空间



① 平面元的任意点坐标(X,Y,1)

② 原点O为影射中心

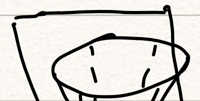
③ 无穷远点坐标为(x,y,

④ 直线的齐次坐标表示 $ax+by+cz=0$

z=1表示普通直线，z=0表示无穷远直线

圆锥曲线和射影几何：

二次曲线可以由锥面与平面元的交线得到，用射影几何的语言来讲就是圆锥曲线是一个圆在平面上的投影如Page 214－图94，因为圆的定义涉及到距离，所以圆是度量几何的概念，如果用纯射影几何的概念可以描述为二次曲线是两族射影相关的线束中相应直线交点的轨迹（Page 216－217）



Page 214 — 图 94

第五章拓扑学

第六章函数和极限

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to e$

$$(1+\frac{1}{n})^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots C_n^r\frac{1}{n^r} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot n\cdot n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\cdot n^3} + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!\, n^r} + \cdots + \frac{n!}{(n-n)!\, n!\, n^n}$$

当 $n \to \infty$ 时，如上 e 的复利公式与 a_n 相等

$$2\pi = 2^m\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

（内含 $m-1$）个套着的平方根号

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}}$$

第七章极大与极小

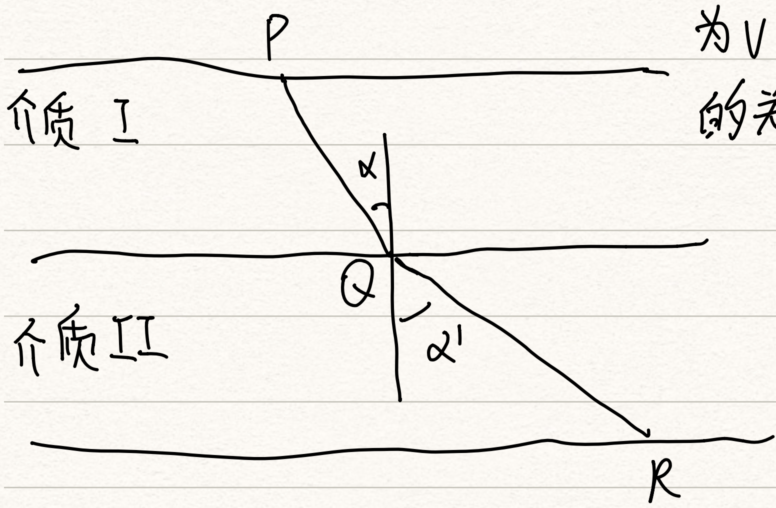
施氏茨的三角形问题：给定一个锐角三角形，求内接于它且周长最短的三角形.(内接三角形的意思是指它的顶点分别在原三角形的每一边上)

这个三角形的三个顶点就是原三角形三条高线的垂足.

这个三角形也叫垂足三角形，证明参见P359，结合图198证明很巧妙

设想一个质点沿连接点A和一个更低的点B在一条曲线无摩擦力地下滑，如质点仅在重力影响下，那么沿怎样一条曲线才使质点下滑所需时间最短

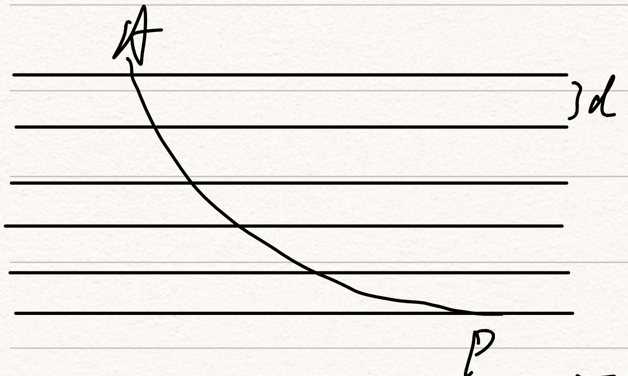
解：先以光在不同介质的传播说明，设光在介质I中速度为v，光在介质II中速度为w，则折射角的关系为：



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\frac{v}{w}$$

且费马证明了这条路径使光线由P到R所需的时间最少。

到原问题，质点沿曲线下滑在任意一点速度与高度的开方$\sqrt{h}$成正比，$v=c\sqrt{h}$（动能方程），现把空间分割为很多很薄的水平空间，每片的厚度为d，在每个空间内不走曲线，走直线，每两个薄片之间走折线（类似上述的光在不同介质传播），则有



$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{d}}=\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{2d}}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n}{\sqrt{nd}}$$

即曲线上任意一点P，$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{h}}$是常数

这个性质是旋转线的特性

第八章微积分